# DISCO presents ディスカバリーチャンネル コードコンテスト 2016 予選 解説

writer : chokudai, camypaper

## A : SD カード

SD カード 1 枚に入っているチップの数が $A$ 枚から $B$ 枚に増えたときに容量が $C$ GB からいくつになるか，という問題です．この問題においては，チップの枚数と容量に比例関係が成立しているため，容量は $\frac{BC}{A}$ となります．

## B : ステップカット

半径 $R$ の円盤を $N$ 等分するためにある手順で $N+M-1$ 回機械を動作させたときにかかるコストの総和を求めよという問題です．$i(1 \leq i \leq N+M-1)$ 回目の操作では，$i$ 番目と $i-M$ 番目の線のうち，長い方の線のコストがかかります．$i$ 番の線の長さは $i$ 番目の線から円盤の中心までの距離が分かれば，三平方の定理を使って $O(logR)$ 程度で簡単に求められます．$1,2,\ldots,N+M-1$ 回目の操作をシミュレートすることで $O((N+M)logR)$ 程度で答えが求められます．

## C : ロト 2

$N$ 要素の数列 $A$ について，$A_i$ と $A_j$ の積が $K$ の倍数となるような $(i,j)(i<j)$ のペアは何通りあるか，という問題です．$N$ は最大で 200,000 と比較的大きいため，$O(N^2)$ で全て調べる解法では 2 秒以内に実行することは困難です．

そこで $gcd(x,y)$ を $x$ と $y$ の最大公約数として，$gcd(A_i,K)gcd(A_j,K)$ が $K$ の倍数となるような $(i,j)$ を数えることにします．$K$ の約数の個数 $d(K)$ は (今回の制約では) 1,344 個で抑えられるため，$gcd(A_i,K)$ の分布を調べておけば，$O(d(K)^2)$ で全探索することができます．$gcd(A_i,K)$ の分布はユークリッドの互除法と連想配列等を用いると $O(NlogK)$ で求められるため，全体として $O(NlogK+d(K)^2)$ で答えを求められます．

上記の解法は正整数 $x,y$ について $xy$ が $K$ の倍数であることと，$gcd(x,K)gcd(y,K)$ が $K$ の倍数であることを同値とみなしていました．以後 $x'=gcd(x,K),y'=gcd(y,K)$ とします．$x'y'$

が $K$ の倍数であるとき，$xy$ もまた $K$ の倍数であることは明らかです．$xy$ が $K$ の倍数であるとき $x'y'$ が $K$ の倍数であることを示します．

$x'y'$ が $K$ の倍数でなく $xy$ が $K$ の倍数となるような $x, y$ を仮定します．このとき，$gcd(x'y', K) < K, gcd(xy, K) = K$ が成立します．ここで $\frac{x}{x'}$ あるいは $\frac{y}{y'}$ の素因数であって，$gcd(x'y', K) < gcd(x'y'p, K)$ となるような $p$ が存在するはずです．しかし，このような $p$ が $\frac{x}{x'}$ に含まれていたとすると，$x'$ が $x$ と $K$ の最大公約数であることに矛盾します．よって，$x'y'$ が $K$ の倍数でなく $xy$ が $K$ の倍数となるような $x, y$ は存在しないため， $xy$ が $K$ の倍数であるとき，$x'y'$ もまた $K$ の倍数であることが示されました．

## D：道路網

$N$ 頂点の木であるような重み付きグラフが与えられ，ここにいくつか長さ $X$ の辺を追加して完全グラフにした後，$1 \leq i < j \leq N$ を満たす $(i, j)$ について $i$ から $j$ へ移動する最短距離をそれぞれ求め，その総和を出力せよ，という問題です．辺が追加される前のグラフにおいて，ある頂点 $u$ から $v$ へのパスの長さが $X$ より大きいならば，$u$ から $v$ へ追加された辺を通って直接移動することで最短距離を $X$ にすることが基本的には可能です．そこで，辺が追加される前のグラフにおける長さが $X$ 以下のパスの長さの総和と，長さが $X$ を超えるパスの数をそれぞれ求められれば，辺が追加された後のグラフについても答えが求められます．

パスの始点 $u$ と終点 $v$ の組合せ $(u, v)$ を愚直に列挙しようとすると，$O(N^2)$ かかるため間に合いません．そこで重心分解を行います．すると，$N$ 頂点の木において，重心 $c$ を通るようなパスについての問題を $O(f(N))$ で解くことが可能ならば，全体として $O((f(N) + N)logN)$ で答えを求めることができます．重心 $c$ を通るようなパスであって，長さが $X$ 以下であるものの長さの総和を求めることも長さが $X$ を超えるパスの数を求めることも，各頂点の $c$ からの距離を求めておけば，Fenwick Tree を使うなど様々な方法により $O(NlogX)$ あるいは $O(NlogN)$ 程度で解くことが可能です．よって，全体としてこの問題は $O(NlogNlogX)$ あるいは $O(Nlog^2N)$ 程度で解くことができました．

さて，先程ある頂点 $u$ から $v$ へのパスの長さが $X$ より大きいならば，$u$ から $v$ へ移動することで最短距離を $X$ にすることが基本的には可能と述べました．頂点 $u$ と $v$ が直接つながっている場合に限り，$u$ と $v$ の間に追加された辺は存在しないため．そのような移動は不可能です．このとき，以下の 5 種類の移動方法が答えの候補になります．このとき，4 番目の方法は，$u$ にも $v$ にも隣接していない頂点が存在しないならば用いることができないことや， 5 番目の頂点は $u$ に隣接している頂点，あるいは $v$ に隣接している頂点が存在しないならば用いることができないことに注意してください．

1. $u$ と $v$ をつなぐ辺を用いて移動する
2. $u$ に隣接する $v$ 以外の頂点 $t$ に移動し，$t$ から $v$ へ追加された辺を用いて移動する
3. $v$ に隣接する $u$ 以外の頂点 $t$ に追加された辺を用いて移動し，$t$ から $v$ へ移動する

4. $u$ から $v$ へ，$u$ にも $v$ にも隣接していないような頂点 $t$ を経由して移動する
5. $u$ から $v$ へ隣接している頂点 $t$ へ，$t$ から $u$ へ隣接している頂点 $r$ へ，$r$ から $v$ へ全て追加された辺を通って移動する．